Nachhilfestunde 3

$$f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{t}{2}x^2$$

Zur Untersuchung einer ganzrationalen Funktionenschar mit Zusatzaufgaben

Niveau: Grundkurs Gymnasium
oder Fachoberschule

KEIN ANFÄNGERTEXT

Datei Nr. 42204

Stand: 13. Februar 2025

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

VORWORT

In dieser dritten Nachhilfestunde zu ganzrationalen Funktionen geht es um eine Funktionenschar. Das sind Funktionen die denselben Bauplan und daher ganz ähnliche Eigenschaften aufweisen. Ich zeige dir, wie man einige der Grundaufgaben dazu löst.

Aufgabe

Gegeben sei die Funkton f_t für $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ durch $f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3$ [illegible] $\frac{[illegible]}{2}tx^2$.

K_t sei das Schaubild der Funktion f_t.

a) Bestimme die Nullstellen von f_t.

b) Welche Extrempunkte und welchen Wendepunkt [illegible] die Kurve [illegible]?

c) Skizziere die Kurven K_1 und $K_{0,5}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

d) Die Hochpunkte der Kurvenschar liegen auf einer so genannten [illegible]kurve C.
Stelle die Gleichung von C auf. (Erg[illegible] $\frac{1}{[illegible]}x^3$)

e) Welche der Scharkurven K[illegible] durch den Punkt A([illegible])?

Geht durch jeden Punkt der x-y-Ebene eine Kurve der Schar K_t?

f) Wo schneiden sich zwei beliebige Scharkurven?

g) Die Gerade g: $y = -\frac{9}{2}x$ [illegible] berührt eine der Scharkurven K_t an der Stelle x = 9.

Für w[illegible] möglich[illegible]

h) Die Gerade g, die Wendetangente von K_1 und die x-Achse begrenzen ein Dreieck.

Berechne seinen Flächeninhalt.

Wir lösen nun diese Aufgabe gemeinsam in 13 Abschnitten

$\boxed{1}$ Gegeben ist die Funktion f_t für $x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$ durch $f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx^2$.

Das Schaubild von t_t sei K_t.

Zu jedem t stellt diese Gleichung eine Funktion dar. Daher nennt man f_t auch eine **Funktionenschar**.

Kurvendiskussion für f_t

Wir bestimmen zuerst die **Nullstellen** von f_t bzw. die Schnittpunkte des Graphen K_t mit der x-Achse. Da alle Punkte auf der x-Achse die y-Koordinate 0 haben, suchen wir also die Zahlen mit dem Funktionswert 0.

Bedingung für Nullstellen: $f_t(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx$ [illegible]

Da jeder Summand des Funktionsterms x enthält, kann man x ausk[illegible]mmern:

$$x^2\left(-\frac{1}{18}x + \frac{1}{2}t\right) = 0$$

Diese Gleichung enthält links ein ***Nullprodukt***.

Dazu muss man wissen, dass ein Produkt genau dann Nu[illegible] wir[illegible] [illegible]nn ein [illegible] wird.

Es gibt in diesem Nullprodukt zwei Fakt[illegible]:

1. Faktor: $x^2 = 0$ [illegible]rt zu[illegible]ppelten Nullstelle $x_{N1} = 0$

2. Faktor: $(-\frac{1}{18}x$ [illegible] $) = 0 \quad \Rightarrow$ [illegible] $x = \frac{1}{2}t$ [illegible] $x_{N2} = 9t$

Ergebnis: f_t hat [illegible] die Nullste[illegible] 0 un[illegible]t.

Oder so: K_t sch[illegible]t die x[illegible]se in $N_1(0|0)$ und $N_2(9t|0)$.

Dabei ist N_1 [illegible] doppelte Nul[illegible]e) ein Berührpunkt der x-Achse.

Nun ein[illegible]ste Aufgabe fü[illegible]:

Berechne d[illegible] Ableitungen und daraus die Extrempunkte.

Mei[illegible] Lösung zeige ich dir im Abschnitt $\Rightarrow \boxed{2}$

$\boxed{2}$ Gegeben ist $f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx^2$

1. Ableitung: $f_t'(x) = -\frac{1}{6}x^2 + tx$

2. Ableitung: $f_t''(x) = -\frac{1}{3}x + t$

3. Ableitung: $f_t'''(x) = -\frac{1}{3}$.

Mit der ***notwendigen Bedingung*** $\mathbf{f_t'(x_E) = 0}$ sucht man nach Punkten mit waagrechter Tangente:

$$-\frac{1}{6}x^2 + tx = 0 \quad | \cdot 6$$

$$-x^2 + 6tx = 0$$

x ausklammern: $x(-x+6t) = 0$ (Nullprodukt)

1. Faktor: $x_{E1} = 0$

2. Faktor: $(-x+6t) = 0 \quad \Rightarrow$ [illegible] $6t$

Dazu gehören diese y-Koordinaten:

$f_t(0) = 0$ (Das w[illegible] die doppelte Nullstelle!) [illegible]d

$f_t(6t) = -\frac{1}{[illegible]} \cdot 6 \cdot$ [illegible] $t^3 +$ [illegible] $t^2 =$ [illegible] $2t^3 + 18t^3 = 6t^3$

Mit der ***hinreichenden Bedingung*** untersucht man [illegible] Art des Extremwerts:

Überprüfung der [illegible]eichende Bedingung: (Beachte, dass t > 0 sein soll!)

$\boxed{f_t''(0) = t > 0}$ d. h. [illegible] $0)$ **ist ein Tiefpunkt.**

$f_t''(6t$ [illegible] $-2t + t$ [illegible] $\Rightarrow$ $\boxed{f\ [illegible]\ t) < 0}$ d.h. $\mathbf{H(6t \mid 6t^3)}$ ist ein **Hochpunkt**.

Nun bist du wieder dran.

Bestimme den Wendepunkt von K_t.

$\Rightarrow \boxed{3}$

$\boxed{3}$

Mit der ***notwendigen Bedingung*** $f_t''(x_W) = 0$ sucht man nach Wendepunkten:

$$-\tfrac{1}{3}x + t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_W = 3t}$$

Mit der ***hinreichenden Bedingung*** bestätigt man, dass eine Wendestelle vorliegt:

$$f_t'''(3t) \neq 0$$

$\boxed{\text{GW}}$: Wenn $f_t''(x_W) = 0$ und $f_t'''(x_W) \neq 0$ ist, dann liegt bei x_W ein Wendepunkt.

Wir brauchen noch die y-Koordinate des Wendepunkts:

$$f_t(3t) = -\frac{1}{18} \cdot 27t^3 + \frac{1}{2}t \cdot 9t^2 = -\frac{3}{2}t^3 + \frac{9}{2}t^3 = \text{[illegible]}$$

Ergebnis: **K_t hat den Wendepunkt $W_t(3t \mid 3t^3)$**

Nun wollen wir eine Skizze von zwei dieser [illegible]kurve[illegible]ekommen

Dazu stellt man die schon bekannten Ergebnisse zusamm[illegible]

	Allgemein	Für t = 1	Für t = 0,5
	$f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3$ [illegible] x^2	$f_1($ [illegible] $-\frac{1}{18}x$ [illegible]	$f_{0,5}(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{4}x^2$
1. Nullstelle:	N [illegible] $0)$	N_1 [illegible] $0)$	$N_1(0 \mid 0)$
2. Nullstelle:	[illegible] $(9t \mid 0)$	$N_2(9 \mid$ [illegible]	$N_2(4{,}5 \mid 0)$
Tiefpunkt:	$N_1($ [illegible]	[illegible] $(0 \mid 0)$	$N_1(0 \mid 0)$
Hochpunkt:	[illegible] $(6t \mid 6t$ [illegible]	$H(6 \mid 6)$	$H(3 \mid \frac{3}{4})$
Wend[illegible]nkt:	W_t [illegible] $\mid 3t^3)$	$W(3 \mid 3)$	$W(\frac{3}{2} \mid \frac{3}{8})$

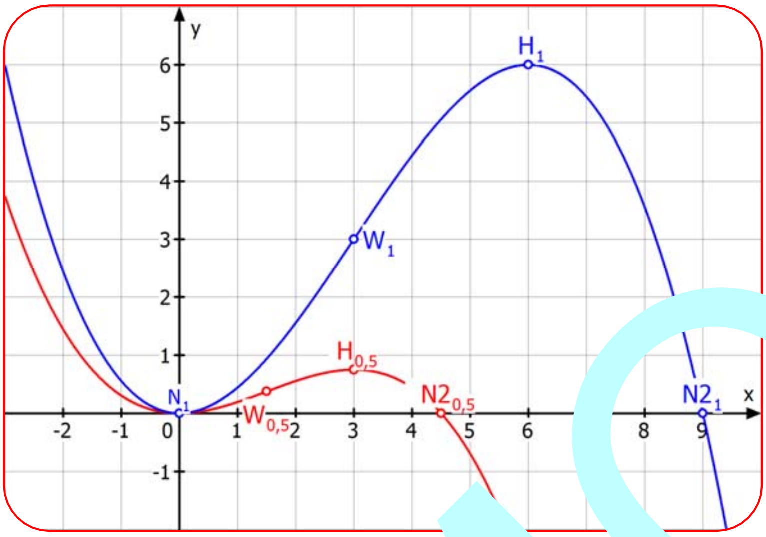
Fertige[illegible] bitte eine Skizze für die Kurven K_1 und $K_{0,5}$ an.

[illegible]iere [illegible]st für jede Kurve Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

$\Rightarrow \boxed{4}$

$\boxed{4}$ Hier die beiden Scharkurven:

K₁: $y = f_1(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ und $K_{0,5}$: $y = f_{0,5}(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{4}x^2$

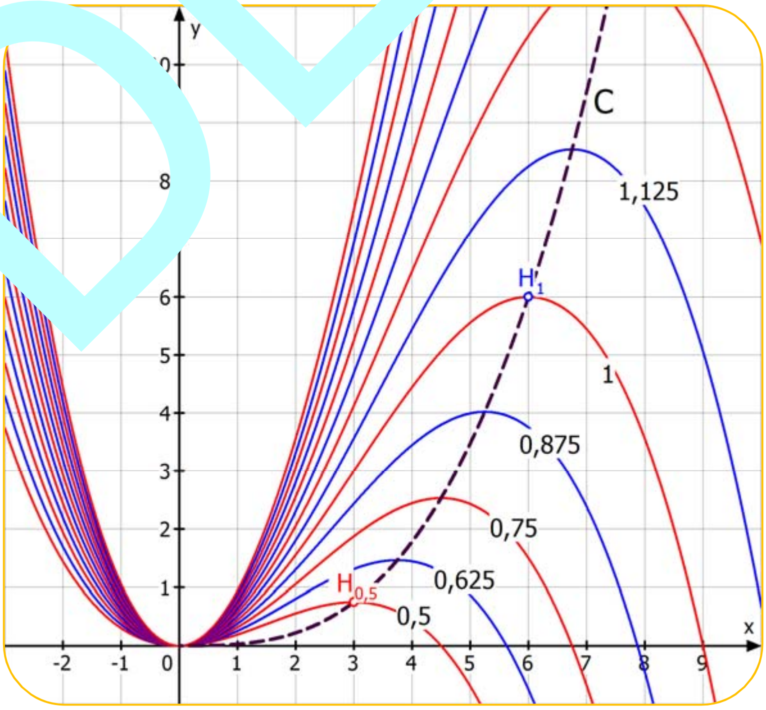


Man beobachtet, dass die Lage der Extrem- und Wendepunkte vom t-Wert der Funktion / Kurve abhängt. Ich zeige in der nächsten Abbildung die Kurven für $t \in \{0,5\ ;\ 0,625\ ;\ 0,75\ ;\ 0,875\ ;\ 1,0\ ;\ 1,125\}$.
Die t-Nummern der Kurven stehen dabei.

Außerdem ist eine Kurve C (schwarz, gestrichelt) vorhanden, die durch alle Hochpunkte der 6 eingezeichneten Scharkurven geht. Man nennt sie die **Ortskurve der Hochpunkte**.

Kannst du beweisen, dass die Ortskurve C die Gleichung $y = \frac{1}{36}x^3$ hat?

Erinnerst du dich: Die Hochpunkte sind $H_t(6t\,|\,6t^3)$. $\Rightarrow \boxed{5}$



$\boxed{5}$ **Auf welcher Kurve C liegen alle Hochpunkte $H_t\left(6t\,|\,6t^3\right)$ mit $t > 0$ der Kurvenschar?**

Für Punkte, bei denen der Parameter t in beiden Koordinaten steht, nimm folgende Methode:

Es ist $x_H = 6t$ Also folgt $t = \frac{1}{6}x_H$

Ersetzt man t in $y_H = 6t^3$, erhält man $y_H = 6\cdot\left(\frac{1}{6}x_H\right)^3$

Oder besser so: $y_H = \frac{1}{6^2}x_H{}^3$

Das bedeutet, dass H_t auf der Kurve C: $y = \frac{1}{36}x^3$ liegt.

Dazu gehört aber noch die für die Kurvenschar gemachte Eins ankung $t > 0$

Zum Thema Ortskurven gibt es einen speziellen Te t auf der the-CD.
Er trägt die Nummer 42060.

*Man merkt sich diese **Methode zur urven-Besti ung** v icht so:*

Hängen beide Koordinaten einer Punk ar v arame ab, dann erhält man die Ortskurve, indem man den ameter aus den Koo eliminiert.

Die nächste Frage zu ge en Kurve char.

Welc geht ch der nkt $A(3|4)$?

T . Wenn eine ein e Kurve Schar gesucht ist, dann ist der Parameter t gesucht!

Bes e ihn bitte! ⇒ $\boxed{6}$

$\boxed{6}$ Die gegebene Funktionenschar ist $f_t(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx^2$.

Die Graphen dieser Funktionen bilden die Kurvenschar K_t: $y = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}tx^2$

Eine Kurve davon geht durch $A(3|4)$.

Also liefert die Punktprobe mit A eine wahre Aussage:

d. h. man setzt A ein (x = 3 und y = 4) und bestimmt t: $\mathbf{4} = -\frac{1}{18}\cdot\mathbf{3}^3 + \frac{1}{2}t\cdot\mathbf{3}^2$

Umstellen: $4 = -\frac{27}{18} + \frac{1}{2}t\cdot 9$

$$4 = -\frac{3}{2} + \frac{9}{2}t \quad\Rightarrow\quad \frac{9}{2}t = \frac{11}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{t = \frac{11}{9}}$$

Nun eine schwierige Denkfrage:

Geht durch jeden Punkt der xy-Ebene genau eine Kurve der Schar K_t?

$\boxed{7}$

$\boxed{7}$ Man wendet dasselbe Verfahren an, wie beim Punkt A.
Nur, dass jetzt ein beliebiger Punkt $P_1(x_1 \mid y_1)$ der Ebene für die Punktprobe genommen wird:

$$y_1 = -\frac{1}{18}x_1^3 + \frac{1}{2}tx_1^2$$

Wir suchen die durch P_1 gehende Kurve, also t:

Umstellen nach t: $y_1 + \frac{1}{18}x_1^3 = \frac{1}{2}tx_1^2$

Seiten vertauschen: $\frac{1}{2}tx_1^2 = y_1 + \frac{1}{18}x_1^3 \quad | \cdot 2$

$$tx_1^2 = 2y_1 + \frac{1}{9}x_1^3 \qquad (*)$$

Nun muss man durch x_1^2 dividieren.

Da man nicht durch 0 dividieren kann, wähle ich eine **Fa unterscheidung**:

1. Fall: Es sei $x_1 \neq 0$, dann kann man durch ividiere

$$t = \frac{2y_1}{x_1^2} + \frac{1}{9}x_1$$

Die rechte Seite ist eindeutig berechenba d. h. h alle Punkte, die nicht auf der y-Achse liege *au eine Ku e* K_t die Schar.

2. Fall: Es sei $x_1 = 0$, d n setzt das in in:

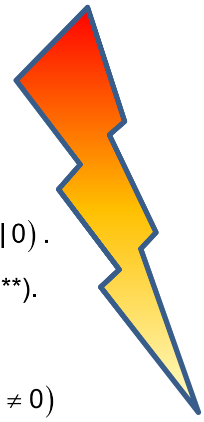
Es folgt $t \cdot 0 = 2y_1 + \frac{\quad}{9}$

bzw $2y_1$ (**)

Das ist ei Aussage, we y_1 tatsächlich null ist, also für $P_1(0 \mid 0)$.

la in (**) t mehr s , ist jedes t eine Lösung der Gleichung (**).

Interpretation. Durch rsprung $P_1(0 \mid 0)$ geht jede Scharkurve
nd durch alle anderen Punkte der y-Achse, also $P_1(0 \mid y_1 \neq 0)$
eht keine der Scharkurven, weil für sie (**) falsch ist.



$\boxed{8}$ Man kann A ck der unteren Abbildung in Abschnitt $\boxed{4}$ vermuten, dass sich zwei verschiedene K ven der Schar immer nur im Ursprung schneiden.
Zum Beweis wählt man zwei verschiedene Kurven

K_1: $y = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}t_1x^2$ und K_2: $y = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}t_2x^2$ mit $t_1 \neq t_2$

und berechnet deren gemeinsame Punkte.

Schaffst du das? $\Rightarrow \boxed{9}$

$\boxed{9}$ Schnitt zweier verschiedener Scharkurven:

Es sei: K$_1$: $y=-\frac{1}{18}x^3+\frac{1}{2}t_1x^2$

und K$_2$: $y=-\frac{1}{18}x^3+\frac{1}{2}t_2x^2$ mit $t_1 \neq t_2$

Schnittgleichung: $\cancel{-\frac{1}{18}x^3}+\frac{1}{2}t_1x^2=\cancel{-\frac{1}{18}x^3}+\frac{1}{2}t_2x^2 \quad | \cdot 2$

$$t_1x^2=t_2x^2$$

Jetzt nicht durch x^2 dividieren sondern:

Alles nach links: $t_1x^2-t_2x^2=0$

x^2 ausklammern: $(t_1-t_2)x^2=0$

Dieses Nullprodukt muss man nun interpretieren.

Da $t_1 \neq t_2$ vorausgesetzt war, kann die Klammer [illegible] Null werden.

Also folgt zwangsläufig: $x^2=0$. (***)

Das heißt: 1. x = 0 ist eine *doppelte* Lösung der Schnittgleichung.

Dort *berühren* sich [illegible] Scharkurven.

2. Da in (***) kein t mehr steht, gilt [illegible] Aussage für alle Scharkurven K$_t$:

Ergebnis: Alle Scharkurven berühren sich im Ursprung.

Andere Schnittpunkte zweier Scharkurven gibt es nicht.

$\boxed{10}$

Eine Zusatzaufgabe:

Die Gerade [illegible] $y=-\frac{9}{2}x+$ [illegible] berührt eine der Scharkurven K$_t$ an der Stelle x = 9.

Für welches t [illegible] das möglich

$\Rightarrow \boxed{11}$

$\boxed{11}$ g: $y=-\frac{9}{2}x+\frac{81}{2}$ berührt K_t bei x = 9.

Da der Berührpunkt B auch auf g liegt, kann man aus der Gleichung von g seine y-Koordinate berechnen:

$$y_B=-\frac{9}{2}\cdot 9+\frac{81}{2}=0$$

Also ist $B(9\,|\,0)$. Durch diesen Punkt geht (wie gezeigt) nur eine der Kurven K_t:

Punktprobe mit B liefert: $$\boxed{0}=-\frac{1}{18}\boxed{9}^3+\frac{1}{2}t\cdot\boxed{9}^2 \quad | : 9^2$$

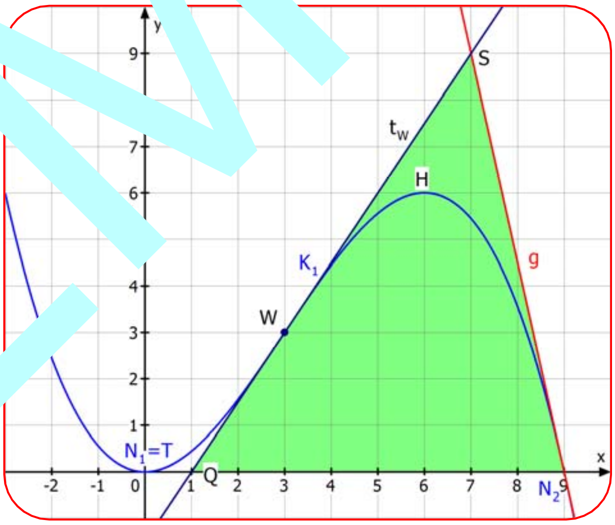
$$0=-\frac{1}{18}\cdot 9+\frac{1}{2}t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t=1}$$

Ergebnis: g berührt also K_1 in B.

$\boxed{12}$ Wir bleiben bei $K_{1.}$

Die Wendetangente, g und die x-Achse begrenzen ein Dr[illegible]ck.

Welchen Inhalt hat dieses Dreieck?



Beginne damit, die Gleichu[illegible]er Wendetangente t_W aufz[illegible]len.

$\Rightarrow$ $\boxed{13}$

$\boxed{13}$ Es geht um die Kurve K_1 bzw. die Funktion $f_1(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

Wir kennen bereits den Wendepunkt: $W_t(3t \mid 3t^3)$

Für t = 1 ist das $W_1(3 \mid 3)$.

Die Tangentensteigung berechnet man mit $f_1'(x) = -\frac{1}{6}x^2 + x$:

$$m_{tW} = f'(3) = -\frac{9}{6} + 3 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Zur Aufstellung einer Geradengleichung verwendet man die **Punkt-Steigungs-Form**:

$y - y_W = m_{tW} \cdot (x - x_W)$, also: $y - 3 = \frac{3}{2}(x-3) \Rightarrow$ [illegible]

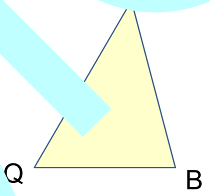
Nun berechnen wir die Eckpunkte des Dreiecks:

Schnittpunkt der Wendetangente mit der x-Achse: $\boxed{0} = \frac{3}{2}x -$ [illegible] $\Rightarrow x_Q = 1 \Rightarrow Q($[illegible]$)$

Schnittpunkt der Wendetangente mit g: $\frac{3}{2}x$ [illegible] $\frac{9}{2}x + \frac{}{2}$ [illegible] $6x_S = 42$ [illegible] $x_S = 7$

mit $y_S = \frac{3}{2} \cdot \boxed{7} - \frac{3}{2} = 9 \Rightarrow S(7 \mid 9)$.

Der Schnittpunkt von g mit der x-Ach[illegible]e war $B(9 \mid 0)$.



Das Dreieck QBS hat also

die Grundseite $\overline{QB} = 9$ [illegible] $= 8$ (LE)

die Höhe h [illegible] $= 9$ (LE)

und den Inhalt: [illegible] $= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 =$ [illegible]E)

Damit e[illegible] u[illegible]e heutige Nachhilfestunde!

CIAO